12/12/2016

Εφαρμογές

Έστω f παραγωγίσιμη

$$[(f(x))^n]' = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Αν $f(x) > 0$ $\quad (\log f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

$$(\sin(f(x)))' = \cos f(x) \cdot f'(x)$$

$$(\cos(f(x)))' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$$

Αν $f(x) > 0$ $\quad (\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$

Για $x > 0$ $\quad a$ πραγματική σταθερά

$$(x^a)' = (e^{\log(x^a)})' = (e^{a\log x})' = e^{a\log x}(a\log x)'$$
$$= x^a a \frac{1}{x} = a x^{a-1}$$

$x > 0$ $\quad (x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}(x\log x)'$
$$= x^x \left(1\log x + x\frac{1}{x}\right)$$
$$= x^x(\log x + 1)$$

$f(x) > 0$ $\quad [(f(x))^{g(x)}]' = (e^{g(x)\log f(x)})' = e^{g(x)\log f(x)}(g(x)\cdot\log f(x))'$

$$(f(x))^{g(x)}\left(g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Παραδείγματα

$f(x) = \sin(x^3+2x^2)$ $\quad f'(x) = \cos(x^3+2x^2)(3x^2+4x)$

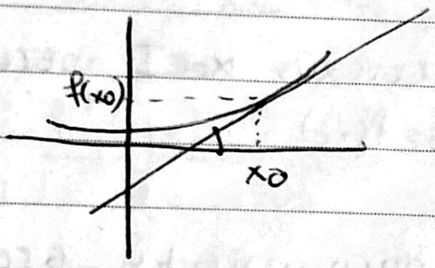
$f(x) = \cos(\sin(x))$ $\quad f'(x) = -\sin(\sin x)\cdot\cos x$

$f(x) = \sin(\sin^2(x^3))$

$$f'(x) = \cos(\sin^2(x^3))\,(\sin^2(x^3))'$$
$$= \cos(\sin^2(x^3))\,2\sin(x^3)\,(\sin(x^3))'$$
$$= \cos(\sin^2(x^3))\,2\sin(x^3)\cos(x^3)\,3x^2$$

Αν $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$

Είναι η ευθεία που διέρχεται από το $(x_0, f(x_0))$ και έχει κλίση $f'(x_0)$
Η εξίσωση της ευθείας αυτής έχει τύπο $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

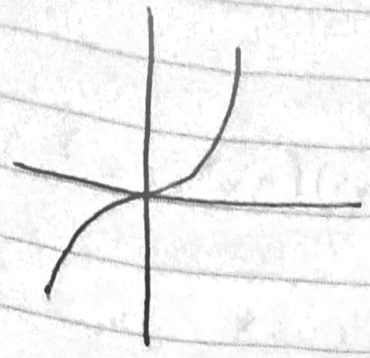


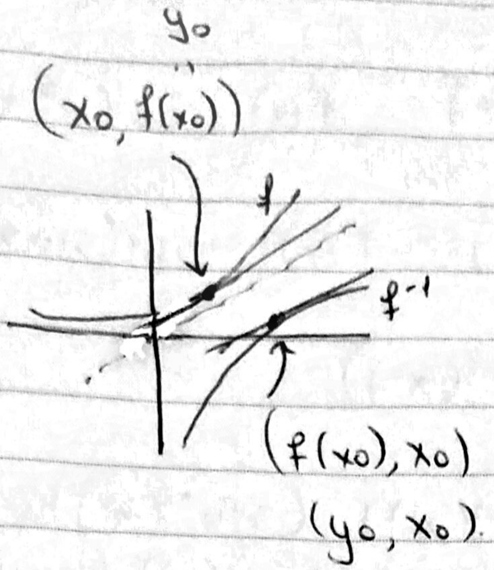
π.χ. $f(x) = \sin x$ $\quad x_0 = \pi/6$
$(x_0, f(x_0)) = (\pi/6, 1/2)$
$f'(x) = \cos x$ και $f'(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Η εφαπτομένη της γρ. παρ. της f στο $(\pi/6, f(\pi/6))$ έχει τύπο

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}/2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$f(x) = x^3$ $\quad x_0 = 0$
$f'(x) = 3x^2$ $\quad (0, f(0)) = (0,0)$
$f'(0) = 0$
$y - 0 = 0(x-0) \Leftrightarrow y = 0$





<u>Υπενθύμιση</u>

Αν I διάστημα $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1
Τότε

α) Η f είναι είτε γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα

β) Το $f(I)$ είναι διάστημα
και η $f^{-1}: f(I) \to I$ είναι συνεχής

<u>Θεώρημα</u> (παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης).

Έστω I διάστημα $f: I \to \mathbb{R}$ 1-1 και συνεχής $x_0 \in I$ ώστε f παραγωγίσιμη στο x_0. Θέτουμε $y_0 = f(x_0)$

α) Αν $f'(x_0) \neq 0$ τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $y_0 = f(x_0)$ και $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

β) Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$

[Μάλιστα αν f γνησίως αύξουσα $(f^{-1})(y_0) = +\infty$
αν f γνησ. φθίνουσα $(f^{-1})(y_0) = -\infty$]

α) Υποθέτουμε ότι $f'(x_0) \neq 0$

Θέλουμε να δ.ο. $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

δηλ. θέλουμε να δ.ο.

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Θεωρούμε τυχαία ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $f(I)$ με $y_n \neq y_0$ $\forall n$ και $y_n \to y_0$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικό $x_n \in I$ ώστε $f(x_n) = y_n$ $(\Rightarrow x_n = f^{-1}(y_n))$

Εφόσον η f είναι συνεχής και 1-1 η f^{-1} ορίζεται και είναι συνεχής

Εφόσον η f^{-1} είναι συνεχής και $y_n \to y_0$ προκύπτει $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$

δηλ. $x_n \to x_0$

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

(διότι $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ και $x_n \to x_0$)

β). Αν $f'(x_0) = 0$

Υποθέτουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$

Εφόσον $(f \circ f^{-1})(y) = y$ $\forall y \in f(I)$

Απο τον κανονα της αλυσιδας
(που εφαρμοζεται εφοσον f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο y_0
και η f είναι παραγωγισιμη στο $f^{-1}(y_0)=x_0$

$$f'(f^{-1}(y_0))\cdot(f^{-1})'(y_0)=1.$$

$$f'(x_0)(f^{-1})(y_0)=1$$

$0\cdot(f^{-1})(y_0)=1$ άτοπο Αρα η f^{-1} δεν ειναι
παραγωγισιμη στο y_0.

Κάποια παραδειγματα εφαρμογης του θεωρηματος σε
γνωστες συναρτησεις.

α) $f(x)=x^2$ $\quad x\in[0,+\infty)$ $\quad f'(x)=2x$

$$f^{-1}(y)=\sqrt{y}$$

Αν $y_0>0$ $\quad x_0=f^{-1}(y_0)=\sqrt{y_0}$

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}=\frac{1}{2f'(y_0)}=\frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

Η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $y_0=0$ διοτι $f^{-1}(0)=0$
και $f'(0)=0$

β) Θεωρώντας γνωστό οτι $(e^x)'=e^x$ θα δ.ο $(\log y)'=\frac{1}{y}$

$f: \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ $\quad f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x>0$

$f^{-1}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f^{-1}(y)=\log y$

Εστω $y_0\in(0,+\infty)$ $\quad y_0=e^{x_0}=f(x_0)$

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}=\frac{1}{f'(\log y_0)}=\frac{1}{e^{\log y_0}}=\frac{1}{y_0}$$

γ) Θεωρώντας γνωστή τη παράγωγο της $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$g(x) = \log x \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

Θα βρούμε την παράγωγο της $g^{-1} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

$g^{-1}(y) = e^{y}$

Έστω $y_0 \in \mathbb{R}$ $\quad y_0 = g(x_0) = \log x_0$ για κάποιο $x_0 \in (0, +\infty)$

$$(g^{-1})(y_0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{g^{-1}(y_0)}} = g^{-1}(y_0) = e^{y_0}$$

Απειροστικός Λογισμός Ι, 5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0. α) Με τον ορισμό β) Με την αρχή της μεταφοράς. [Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα το $f(0)$.]

2. Έστω $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(1) = f(5)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in [1,5]$ με $y - x = 2$ ώστε $f(x) = f(y)$.

3. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς ώστε $(f(x))^2 = (g(x))^2$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι είτε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Έστω $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $x, y, z \in [a, \beta]$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ ώστε $f(\xi) = \frac{1}{3}(f(x) + f(y) + f(z))$.

5. Δίνεται ότι για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(a + \beta) = f(a) + f(\beta)$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο 0 τότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Δείξτε αρχικά ότι $f(0) = 0$ και $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είτε τον ορισμό είτε την αρχή της μεταφοράς.]

6. Αν για τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(a\beta) = f(a) + f(\beta)$ για κάθε $a, \beta > 0$, αποδείξτε ότι: (i) $f(1) = 0$. (ii) $f(\frac{1}{a}) = -f(a)$ για κάθε $a > 0$. (iii) $f(\frac{a}{\beta}) = f(a) - f(\beta)$ για κάθε $a, \beta > 0$ (iv) Αν η f είναι συνεχής στο σημείο 1 τότε είναι συνεχής παντού. (v) Αν η f είναι συνεχής σε ένα $\xi \in (0, +\infty)$ τότε είναι συνεχής στο σημείο 1 (και άρα σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα είναι συνεχής παντού).

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(x) = 5$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f(x) = 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς και την αρχή της μεταφοράς για να αποδείξετε ότι $f(x) = 5$ και για $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.]

8. Έστω $f, g : [0,1] \to [0,1]$ δύο συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες $f \circ g = g \circ f$ και η συνάρτηση f είναι αύξουσα. Να δειχθεί ότι οι f, g έχουν κοινό σταθερό σημείο, δηλαδή ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ ώστε $f(\xi) = \xi$ και $g(\xi) = \xi$. [Υπόδειξη: Βρίσκουμε πρώτα ένα σταθερό σημείο της g δηλαδή ένα $x_1 \in [0,1]$ ώστε $g(x_1) = x_1$. Στη συνέχεια θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με πρώτο όρο x_1 και $x_{n+1} = f(x_n)$. Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι μονότονη και ότι κάθε όρος της είναι σταθερό σημείο της g. Αποδείξτε ότι το όριό της είναι κοινό σταθερό σημείο των f, g.]

9. Για τη συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ισχύει $(x \tan x) f(x) - x^2 + x = x(e^{5x} - x)$ για κάθε x. Να εξηγήσετε γιατί η f είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$ και να εξετάσετε τι πρέπει να συμβαίνει για να είναι η f συνεχής στο 0.

10. Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x^4 + 2)^{\cos x}$ είναι συνεχής.

11. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $-3 < f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $\sqrt{10\xi} = -f(\xi)$.

(β) Υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $f(x) + \sqrt{10x} + 3 \geq \lambda$ για κάθε $x \in [0,1]$.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια περιοδική συνάρτηση (έστω $T > 0$ μια περίοδος της).

α) Να δείξετε ότι η f είναι φραγμένη.

β) Αν το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ υπάρχει να δείξετε είναι πραγματικός αριθμός (δηλαδή ότι αποκλείεται να είναι $+\infty$ ή $-\infty$) και ότι η f είναι σταθερή.